

Avant-propos

Ce livre présente une introduction géométrique à la relativité restreinte. Par *géométrie*, il faut entendre que le point de vue adopté est d’emblée quadridimensionnel. Le cadre mathématique est en effet dès le premier chapitre celui de l’*espace-temps de Minkowski* et les objets fondamentaux sont les vecteurs de cet espace (appelés souvent *quadrivecteurs*) et le tenseur métrique. Les lois physiques sont traduites en terme d’opérations géométriques (produit scalaire, projection orthogonale, etc.) sur des objets de l’espace-temps de Minkowski (quadrivecteurs, lignes d’univers, etc.).

Beaucoup de manuels de relativité commencent plutôt par une approche tridimensionnelle, utilisant des décompositions espace + temps basées sur les observateurs inertiels. C’est seulement dans un deuxième temps qu’ils introduisent les quadrivecteurs et l’espace-temps de Minkowski. Ils sont fidèles en cela au cheminement historique de la relativité. On préfère ici suivre une démarche plus axiomatique, qui s’inscrit dans un cadre mathématique fixé à l’avance comme l’un des postulats de la théorie. De ce point de vue, l’approche adoptée est similaire à celle des manuels de mécanique classique ou de mécanique quantique, où d’ordinaire l’exposé ne suit pas l’histoire de la théorie. L’histoire de la relativité est certes riche et passionnante mais l’objectif de ce livre est l’apprentissage de la relativité restreinte dans un cadre cohérent et opérationnel, depuis les bases jusqu’à des aspects relativement avancés. Le texte est cependant agrémenté ci et là de notes historiques, dans lesquelles nous nous sommes efforcés de faire référence aux articles originaux, ainsi qu’à des études d’historiens des sciences.

Traditionnellement, l’approche géométrique est réservée à la *relativité générale*, c’est-à-dire à l’incorporation du champ gravitationnel dans la théorie de la relativité¹. Nous l’appliquons ici à la relativité restreinte, tenant compte d’une structure géométrique beaucoup plus simple que celle de la relativité générale : alors que cette dernière est basée sur la notion de *variété différentielle*, la relativité restreinte repose entièrement sur la notion d’*espace affine*, que l’on peut identifier à l’ensemble $\mathbb{R}^4$. En conséquence les prérequis mathématiques sont relativement limités ; il s’agit surtout d’algèbre linéaire au niveau des deux premières années de licence ou des classes préparatoires. En fait, les

¹deux exceptions notoires sont les livres de Costa de Beauregard (1949) [94] et de Synge (1956) [399]

mathématiques utilisées ici sont les mêmes que celles d'un cours de mécanique classique, pourvu que l'on soit prêt à admettre deux choses : (i) les vecteurs n'appartiennent pas à un espace vectoriel de dimension trois, mais de dimension quatre ; (ii) les produits scalaires de deux vecteurs ne sont pas les produits scalaires usuels de l'espace euclidien, mais sont donnés par une forme bilinéaire symétrique privilégiée (que l'on appelle le *tenseur métrique*). Une fois cela intégré, on aboutit plus rapidement aux résultats physiques que par l'approche tridimensionnelle « classique » et on acquiert une compréhension plus profonde de la relativité. De plus l'apprentissage de la relativité générale s'en trouve grandement facilité.

Une autre caractéristique du présent ouvrage, reliée à l'approche quadridimensionnelle, est de baser la discussion des effets physiques mesurables sur la notion d'un observateur tout à fait général, c'est-à-dire pouvant être accéléré ou en rotation. À l'opposé, la quasi-totalité (tous ?) des manuels de relativité restreinte sont basés sur une classe privilégiée d'observateurs : les *observateurs inertiels*. S'il est vrai que pour ces derniers la perception des phénomènes physiques est la plus simple qui soit (par exemple, pour un observateur inertiel, la lumière se déplace dans le vide en ligne droite et à vitesse constante), le monde réel est constitué d'observateurs accélérés et en rotation. Aussi, il paraît conceptuellement plus clair de discuter en premier des mesures effectuées par un observateur quelconque, et de traiter ensuite du cas particulier des observateurs inertiels. Inversement, si l'on se restreint d'emblée à ces derniers, il devient compliqué d'étendre la discussion aux observateurs généraux. C'est d'ailleurs en bonne partie la source des nombreux « paradoxes » qui ont émaillé l'histoire de la relativité. Ainsi que mentionné plus haut, l'approche tridimensionnelle de la relativité est basée sur les observateurs inertiels, puisque l'on peut associer à chaque observateur de ce type une décomposition globale de l'espace-temps en une partie « temps » et une partie « espace ».

Une des conséquences de l'approche « observateur général » est le moindre poids accordé à la fameuse *transformation de Lorentz*, qui relie les référentiels de deux observateurs inertiels. D'ordinaire introduite dès le premier chapitre d'un cours de relativité, elle n'apparaît ici qu'au Chap. 6. En particulier, les effets physiques de dilatation des temps ou d'aberration de la lumière sont dérivés (de manière géométrique) aux Chap. 2 et 4, sans recourir explicitement à la transformation de Lorentz. Dans le même ordre d'idée, le *principe de relativité*, sur lequel la relativité restreinte a été fondée au début du XX^e siècle (lui devant son nom !), n'apparaît ici qu'au Chap. 9, et encore à l'occasion d'une note historique.

Le plan de l'ouvrage est le suivant. Le cadre mathématique complet (espace-temps de Minkowski) est fixé dès le Chap. 1. Est ensuite introduite la notion de ligne d'univers et de temps propre (Chap. 2), illustrée par une discussion détaillée du fameux « paradoxe des jumeaux ». Le Chap. 3 est entièrement consacré à la définition d'un observateur et de son espace (local) de repos, dans un cadre tout à fait général, prenant en compte aussi bien l'accélération que la

rotation de l'observateur. La notion d'observateur étant précisée, on passe à la cinématique, et ce en deux temps : (i) en fixant l'observateur au Chap. 4 (introduction du facteur de Lorentz, des vitesses et accélérations relatives) et (ii) en discutant au Chap. 5 tous les effets induits par un changement d'observateur (loi de composition des vitesses et des accélérations, effet Doppler, aberration, formation des images, mouvements « superluminiques » en astrophysique). Les deux chapitres qui suivent sont entièrement consacrés au groupe de Lorentz : à sa structure algébrique au Chap. 6, avec l'introduction des transformations de Lorentz spéciales et la rotation de Thomas, et à sa structure de groupe de Lie au Chap. 7. Le Chap. 8 discute de la classe privilégiée des observateurs inertiels, introduisant le groupe de Poincaré et son algèbre de Lie. La dynamique des particules commence au Chap. 9, où est présentée la notion de quadri-impulsion et le principe de sa conservation pour tout système isolé. Le Chap. 10 est quant à lui consacré à la conservation du moment cinétique et aux notions de centre d'inertie et de spin. La dynamique relativiste est ensuite reformulée au Chap. 11 sous la forme d'un principe de moindre action, les lois de conservation apparaissant alors comme des conséquences du théorème de Noether. On présente également dans ce chapitre une formulation hamiltonienne relativiste de la dynamique des particules. Le Chap. 12 se focalise sur les observateurs accélérés, discutant tout aussi bien des aspects cinématiques (horizon de Rindler, synchronisation des horloges, précession de Thomas) que des aspects dynamiques (décalage spectral, mouvement des particules libres). Un deuxième type d'observateurs non-inertiels est étudié au Chap. 13 : les observateurs en rotation. On y détaille notamment l'effet Sagnac et l'application aux gyromètres laser qui équipent aujourd'hui les centrales inertiels des avions.

À partir du Chap. 14 s'ouvre une deuxième partie du livre, où l'objet physique principal n'est plus une particule mais un champ. Cette partie débute par trois chapitres entièrement mathématiques, qui introduisent les notions de tenseur (Chap. 14), de champ tensoriel (Chap. 15) et d'intégration sur des domaines de l'espace-temps (Chap. 16). Dans ces chapitres sont notamment présentés les p -formes différentielles et le calcul extérieur, fort utiles pour l'électromagnétisme mais aussi l'hydrodynamique. Soulignons qu'il nous a paru nécessaire de consacrer un chapitre entier à l'intégration afin d'introduire avec suffisamment de détails et d'exemples les notions de sous-variété de l'espace-temps de Minkowski, d'élément d'aire et de volume, d'intégrale d'un champ scalaire ou vectoriel et d'intégrale de flux. Le chapitre se termine par le fameux théorème de Stokes et ses applications. Armés de ces outils mathématiques, nous abordons l'électromagnétisme au Chap. 17. Là encore l'accent est mis sur l'aspect quadridimensionnel avec l'introduction première du tenseur champ électromagnétique $\mathbf{F}$ et seulement dans un deuxième temps des vecteurs champ électrique $\vec{E}$ et champ magnétique $\vec{B}$. On discute bien évidemment dans ce chapitre du mouvement d'une particule chargée et des divers types d'accélérateurs de particules. Le chapitre suivant (Chap. 18) présente les équations de

Maxwell, là aussi sous leur forme quadridimensionnelle, intrinsèquement plus simple que les équations tridimensionnelles classiques portant sur $\vec{E}$ et $\vec{B}$. On dérive également dans ce chapitre les potentiels de Liénard-Wiechert, conduisant au champ électromagnétique créé par une particule chargée en mouvement quelconque. Le Chap. 19 introduit le concept de tenseur énergie-impulsion, objet fondamental pour la dynamique des milieux continus en relativité. On présente notamment les principes de conservation de la quadri-impulsion et du moment cinétique sous une forme « continue », par opposition aux formes « discrètes » données aux Chap. 9 et 10. On peut alors discuter en détail de l'énergie-impulsion du champ électromagnétique au Chap. 20. Dans ce chapitre sont calculées l'énergie et l'impulsion rayonnée par une particule chargée en mouvement. Un cas particulier est constitué par le rayonnement synchrotron, dont nous discutons les applications (astrophysique et installations synchrotron). Le Chap. 21 aborde l'hydrodynamique relativiste, tout d'abord sous la forme standard, puis en utilisant le calcul extérieur introduit aux Chap. 14 et 15. Cette dernière approche facilite grandement l'obtention des généralisations relativistes des théorèmes classiques de la mécanique des fluides. Deux applications particulièrement importantes et contemporaines de l'hydrodynamique relativiste sont détaillées dans ce chapitre : les jets relativistes en astrophysique et le plasma quark-gluon créé dans les collisionneurs d'ions lourds. Enfin le livre se termine par le problème de la gravitation (Chap. 22) : après avoir discuté des tentatives infructueuses du traitement de la gravitation en relativité restreinte, nous présentons brièvement la relativité générale. Soulignons à cet égard que l'étude des observateurs accélérés au Chap. 12 permet, via le principe d'équivalence, de discuter aisément de divers effets relativistes de la gravitation : décalage spectral (effet Einstein) et déviation des rayons lumineux.

Ce livre contient six chapitres purement mathématiques (Chap. 1, 6, 7, 14, 15 et 16). Le but est d'introduire de manière cohérente et progressive tous les outils nécessaires à la relativité restreinte, jusque dans des aspects relativement avancés. Par ailleurs, en tant qu'ouvrage consacré à une théorie dont les fondations sont centenaires, le livre ne contient pas vraiment de résultats originaux. On notera toutefois l'expression générale de la quadriaccélération d'une particule en fonction de son accélération et vitesse relatives à un observateur quelconque (i.e. accéléré et en rotation) [Eq. (4.60)], la loi de composition des accélérations relatives lors d'un changement d'observateur, faisant apparaître la généralisation relativiste des accélérations centripète et de Coriolis [Eq. (5.60)], la classification complète des transformations de Lorentz à partir d'une direction lumière invariante (§ 6.3), le calcul élémentaire et relativement court de la rotation de Thomas dans le cas le plus général (§ 6.6.2), les expressions de l'énergie et de l'impulsion relatives à un observateur tenant compte de l'accélération et de la rotation du dit observateur [Eqs. (9.12) et (9.13)], le calcul de l'écart entre l'hyperplan de repos d'un observateur et son hypersurface de simultanéité (§ 12.2), l'expression de la quadriaccélération d'un observa-

teur en terme de quantités physiquement mesurables [Eq. (12.74)], l'équation du mouvement d'une particule libre en coordonnées de Rindler [Eqs. (12.76) et (12.83)] et la démonstration que la limite non-relativiste de l'équation canonique de la dynamique des fluides est constituée par l'équation de Crocco (§ 21.4.4).

Une des limitations du livre est le domaine classique : on n'y aborde pas les aspects ayant trait à la mécanique quantique. En particulier, on ne discute pas des représentations du groupe de Poincaré et des spineurs. Même si ces notions ne sont pas quantiques par elles-mêmes, elles sont essentiellement utilisées dans la théorie quantique relativiste, notamment pour écrire l'équation de Dirac — que nous n'abordons pas ici.

Remerciements

Ce livre doit énormément aux échanges que j'ai eus avec de nombreux collègues lors de sa rédaction. Qu'il me soit donc permis de remercier ici Miguel Angel Aloy, Silvano Bonazzola, Christian Bracco, Brandon Carter, Piotr Chrusciel, Bartolomé Coll, Jean-Louis Cornou, Thibault Damour, Olivier Darrigol, Nathalie Deruelle, Philippe Droz-Vincent, Guillaume Faye, Thierry Grandou, Jean Eisenstaedt, Gilles Esposito-Farèse, José María Ibañez, Marianne Impéror-Clerc, José Luis Jaramillo, Arnaud Landragin, Jean-Philippe Lenain, Gregory Malykin, Petar Mimica, Jean-Philippe Nicolas, Jérôme Novak, Micaela Oertel, Jean-Pierre Provost, Alain Riazuelo, Matteo Luca Ruggiero, Christophe Sauty, Hélène Sol, Pierre Teyssandier, Nicolas Vasset, Christiane Vilain, Loïc Villain, Frédéric Vincent, Scott Walter et Andreas Zech.

Je suis infiniment reconnaissant à Luc Blanchet, Thibault Damour, Olivier Darrigol, Thierry Grandou, Valérie Le Boulch, Micaela Oertel, Alain Riazuelo, Pierre Teyssandier, Loïc Villain, Frédéric Vincent et Scott Walter pour la lecture détaillée d'une version préliminaire du manuscrit. Leurs multiples corrections et suggestions ont été d'une valeur inestimable ! Je remercie par ailleurs vivement Thibault Damour de m'avoir fait l'honneur d'écrire la préface.

Ma gratitude va aussi au personnel de la bibliothèque de l'Observatoire de Paris (campus de Meudon) pour sa gentillesse et son efficacité. J'ai par ailleurs la chance de travailler dans un laboratoire animé par des personnels administratifs et techniques fort sympathiques et compétents. Merci donc à Jean-Yves Giot, Virginie Hababou, David Lépine, Stéphane Méné et Stéphane Thomas. Ce livre est en partie issu d'un cours de relativité générale au master *astrophysique* de l'Observatoire de Paris et des universités Paris 6, 7 et 11. Je souhaite exprimer ici ma gratitude aux étudiants pour les échanges durant les cours, qui sont toujours une source inégalée de stimulation. J'ai également une pensée pour les auteurs des logiciels libres L^AT_EX, OpenOffice Draw, Gnuplot, Xmgrace et Subversion. Sans ces outils extraordinaires, la rédaction du livre aurait certainement été beaucoup plus difficile, voire impossible dans un délai raisonnable.

Enfin, je remercie du fond du cœur Michèle Leduc et Michel Le Bellac pour leur confiance, leurs conseils et leurs encouragements tout au long de la rédaction du livre.

Notes

Bibliographie : Dans la liste des références à la fin de l'ouvrage, lorsqu'une entrée contient une adresse Internet, il s'agit de l'URL à laquelle on peut télécharger librement une copie de l'article ou du livre. Soulignons que la plupart des articles historiques sont aujourd'hui accessibles de cette manière, des articles fondateurs de la relativité du début du XX^e siècle aux articles de la « préhistoire » de la relativité du XVII^e siècle, par exemple ceux de Picard (premières observations de l'aberration des étoiles [324]) et de Rømer (première mesure de la vitesse de la lumière [362]). Lorsqu'une entrée bibliographique ne contient pas d'adresse Internet, l'article est en général téléchargeable depuis le site web de la revue, mais cela nécessite un abonnement. Notons toutefois que la plupart des articles récents sont librement accessibles, sous forme de prépublications, à l'adresse <http://fr.arxiv.org>

Notations : Les notations et symboles mathématiques sont définis dans le texte au fur et à mesure des besoins. Pour faciliter la lecture, ils sont regroupés sous forme d'index p. 737. Dans l'écriture des nombres décimaux, on utilise le point et non la virgule.

Page web : il existe une page web dédiée à ce livre :

<http://relativite.obspm.fr>

Elle comprend des errata, la liste cliquable des références bibliographiques, tous les liens mentionnés à l'Annexe B, ainsi que des compléments et divers documents. Le lecteur est invité à utiliser cette page pour signaler toute erreur qu'il trouverait dans le livre.