

Enseigner la relativité restreinte en CPGE : une approche graphique

Éricourgoulhon

Laboratoire Univers et Théories

CNRS, Observatoire de Paris, Université Paris Diderot

eric.gourgoulhon@obspm.fr

<http://luth.obspm.fr/~luthier/gourgoulhon/>

— 17 janvier 2012 —

Résumé

Ce texte présente une ébauche de cours possible pour introduire la relativité restreinte en classes préparatoires aux grandes écoles. L'exposé est basé sur des diagrammes d'espace-temps bidimensionnels et fait le lien avec les nouveaux programmes de Terminale S. L'accent est mis sur la mesure du temps et la notion de simultanéité d'Einstein-Poincaré. On présente notamment une démonstration graphique de la transformation de Lorentz, ainsi que de l'effet Doppler relativiste. La dernière partie, plus mathématique, pourrait servir d'illustration du cours d'algèbre en classe de MP ou MP.*

1 Introduction

La relativité restreinte est l'un des piliers de la physique moderne, à la base de la théorie quantique des champs, de la physique nucléaire et de la physique des particules, mais aussi de nombreux domaines de l'astrophysique. Or elle est complètement absente des programmes actuels des classes préparatoires aux grandes écoles (CPGE); elle a en fait été supprimée en 1995. La question est légitimement posée de sa réintroduction, notamment au niveau de l'Union des Professeurs de Spéciales [1, 4]. À cet égard, soulignons que des notions de relativité figurent dans le nouveau programme de terminale S, qui sera mis en place à la rentrée 2012 [2], et que certaines universités proposent des cours de relativité dès le niveau L2 [12].

Dans ce qui suit, nous présentons une introduction à la relativité restreinte adaptée à des élèves de CPGE, ne mettant en œuvre que des connaissances mathématiques acquises en terminale S. Dans le § 4, nous présentons également un approfondissement faisant appel à des notions d'algèbre linéaire étudiées en deuxième année de CPGE.

L'approche adoptée ici fait un usage important de diagrammes d'espace-temps bidimensionnels; ils permettent une compréhension approfondie de la relativité et la dérivation de résultats importants avec un minimum de calculs. Par ailleurs, nous ne détaillons pas les aspects expérimentaux, nous limitant à la simple mention des expériences classiques qui illustrent un point donné. Ces expériences sont décrites dans de nombreux manuels (par exemple [3, 7, 8, 9, 10, 11]).

2 Cinématique relativiste

2.1 Les bases : postulats d'Einstein et temps propre

Démarrons par les deux postulats d'Einstein (1905) [5] :

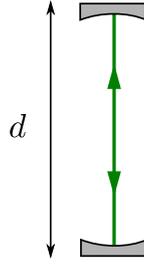


FIGURE 1 – Horloge-lumière.

1. *Principe de relativité* : les lois de la mécanique sont invariantes par changement de référentiel inertiel.
2. *Principe de constance de la vitesse de la lumière* : la vitesse de la lumière a la même valeur, notée c , dans n'importe quel référentiel inertiel.

Remarque 1: Si dans le postulat 1, on remplaçait « lois de la mécanique » par « lois de la physique », afin d'inclure l'électromagnétisme, alors le postulat 2 se déduirait du postulat 1 via les équations de Maxwell, ces dernières conduisant à une vitesse de la lumière égale à c dans tout référentiel inertiel.

Remarque 2: Une approche alternative de la relativité restreinte se base sur une structure géométrique appelée *espace-temps de Minkowski*¹ (cf. par exemple [7]). Les deux postulats énoncés ci-dessus apparaissent alors comme des résultats dérivés et non comme des principes premiers.

Remarque 3: Ce que l'on appelle ci-dessus *vitesse de la lumière* est en fait une constante c dont le rôle est de donner la même dimension à l'espace et au temps. Dans le cadre de la relativité restreinte, on peut tout à fait concevoir une théorie de l'électromagnétisme différente de celle de Maxwell et où les photons se déplacent à une vitesse strictement inférieure à c . La lumière, en tant que telle, ne joue donc pas un rôle primordial dans le fondement de la relativité.

Introduisons une *horloge-lumière* comme un dispositif formé de deux miroirs séparés d'une distance d et entre lesquels un signal lumineux (photon) effectue des allers-retours, générant une série de tics-tacs de période $t = 2d/c$ (cf. Fig. 1). On peut définir le *temps propre* d'un observateur comme le temps donné par une horloge-lumière qu'il transporte, c'est-à-dire une horloge immobile par rapport à lui.

Considérons une horloge-lumière en translation uniforme à la vitesse \vec{v} par rapport à un référentiel inertiel \mathcal{R} , le vecteur \vec{v} étant orthogonal à l'axe des miroirs (cf. Fig. 2). Dans le référentiel \mathcal{R}' où l'horloge est au repos (moitié gauche de la Fig. 2), le temps d'un demi-battement d'horloge est

$$t' = \frac{d}{c}. \quad (1)$$

Dans le référentiel \mathcal{R} (moitié droite de la Fig. 2), le temps d'un demi-battement est

$$t = \frac{\ell}{c}, \quad (2)$$

où ℓ est la distance parcourue par le faisceau lumineux entre les deux miroirs dans \mathcal{R} . Le fait que l'on divise par la même quantité c dans les formules (1) et (2) est le reflet du deuxième postulat d'Einstein : la vitesse du signal lumineux entre les deux miroirs est la même dans \mathcal{R} et \mathcal{R}' .

1. L'espace-temps de Minkowski sera présenté brièvement au § 4.

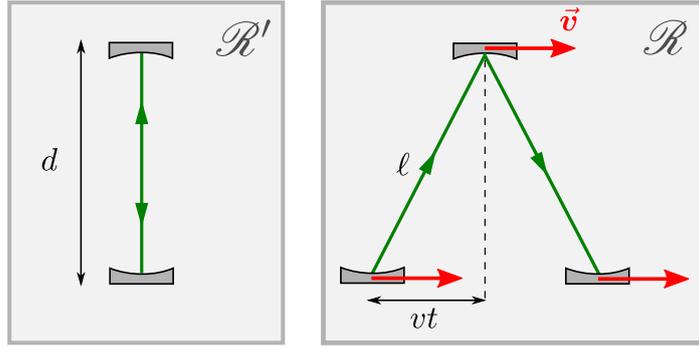


FIGURE 2 – Horloge-lumière dans le référentiel \mathcal{R}' en translation à la vitesse \vec{v} par rapport au référentiel inertiel \mathcal{R} .

Puisque \mathcal{R}' voyage à la vitesse v par rapport à \mathcal{R} , le théorème de Pythagore donne (cf. Fig. 2)

$$\ell^2 = d^2 + v^2 t^2.$$

Le carré de la relation (2) peut alors se mettre sous la forme $(1 - v^2/c^2)t^2 = d^2/c^2$. En comparant avec (1), on en déduit la relation suivante entre le temps propre t dans \mathcal{R} et le temps propre t' dans \mathcal{R}' :

$$\boxed{t = \gamma t'}, \quad \text{avec} \quad \boxed{\gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}. \quad (3)$$

Le coefficient γ est appelé *facteur de Lorentz* de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} . Comme $\gamma \geq 1$, on en déduit le phénomène de *dilatation des temps* : $t \geq t'$.

Illustrations expérimentales :

- Mesure du temps de vie des muons atmosphériques (muons produits dans l'atmosphère terrestre par les rayons cosmiques) : expériences de Rossi et Hall (1941) et Firsch et Smith (1963).
- Horloges atomiques embarquées dans des avions : expérience de Hafele et Keating (1971)².

Remarque : Ce qui précède (§ 2.1) correspond essentiellement à la partie relativité du nouveau programme de terminale S [2].

2.2 Diagrammes d'espace-temps et simultanéité

On définit l'*espace-temps* \mathcal{E} comme le continuum à 4 dimensions formé par l'ensemble des *événements*. Pour la relativité restreinte, il s'agit de la structure mathématique la plus simple qui soit pour un tel continuum³ : celle d'un espace affine de dimension 4 sur \mathbb{R} . L'espace vectoriel associé est alors \mathbb{R}^4 . Pour les aspects graphiques, on se limitera à une seule dimension spatiale x . L'espace-temps apparaît alors comme un plan affine. Un *diagramme d'espace-temps* est la représentation graphique de \mathcal{E} par rapport à un référentiel inertiel \mathcal{R} donné : elle est constituée par un repère orthonormal où l'on porte en abscisse la position x des événements vis-à-vis de \mathcal{R} et en ordonnée la date t multipliée par c (cf. Fig. 3).

Remarque : À ce stade, ce type de diagramme est valable tout aussi bien pour la physique newtonienne que pour la physique relativiste. Plus bas (cf. Fig. 9), nous discuterons explicitement d'un diagramme d'espace-temps newtonien.

2. Dans cette expérience apparaît un autre effet de dilatation des temps, dû au champ gravitationnel de la Terre ; il s'agit d'un effet de relativité générale ; les deux effets sont du même ordre de grandeur.

3. La relativité générale, qui, à la différence de la relativité restreinte, incorpore la gravitation, met en œuvre une structure plus complexe, à savoir celle de variété différentielle.

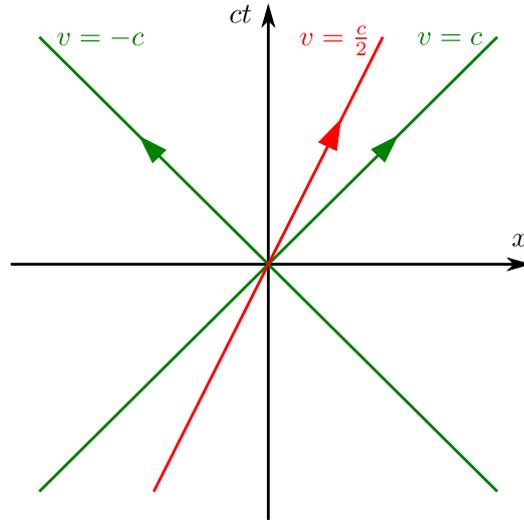


FIGURE 3 – Diagramme d’espace-temps construit à partir d’un référentiel inertiel \mathcal{R} (temps propre t). On a dessiné les lignes d’univers d’un photon se propageant vers la gauche ($v = -c$), d’une particule de vitesse $v = c/2$ par rapport à \mathcal{R} et d’un photon se propageant vers la droite ($v = c$).

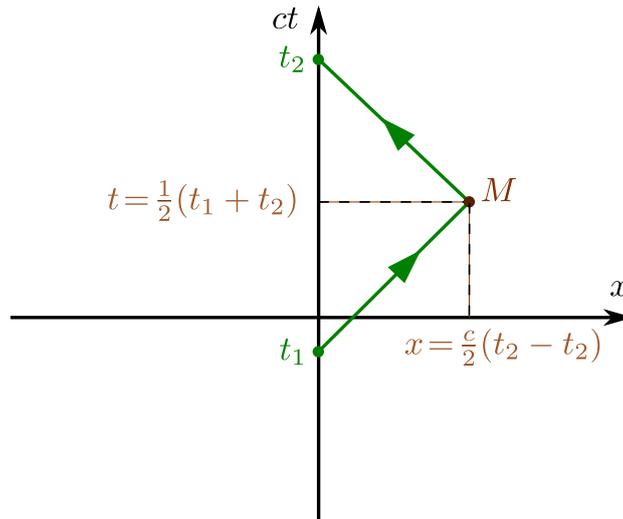


FIGURE 4 – Datation d’un événement M suivant la méthode d’Einstein-Poincaré.

Une particule est représentée dans un tel diagramme par une courbe appelée *ligne d’univers*. La ligne d’univers d’une particule en mouvement rectiligne uniforme par rapport à \mathcal{R} est une droite de pente c/v , où v est la vitesse de la particule (cf. Fig. 3). En particulier, les lignes d’univers des photons ($|v| = c$) sont des droites inclinées à $\pm 45^\circ$, puisque sur ces lignes, $x = \pm ct$. Les deux lignes d’univers de photon issues d’un événement M forment le *cône de lumière* de sommet M . Si l’on restitue une deuxième dimension spatiale (y), il s’agit effectivement d’un cône au sens usuel du terme. Si l’on ajoute la troisième dimension spatiale (z), il s’agit en fait d’une « surface » de dimension 3 dans \mathcal{E} : un *hypercône*.

La date t et la position x d’un événement M peuvent être mesurés uniquement à l’aide d’une horloge immobile à l’origine $x = 0$ du référentiel \mathcal{R} et d’un dispositif d’émission et de réception de photons : en notant t_1 le temps d’émission d’un signal lumineux depuis l’origine vers M et t_2

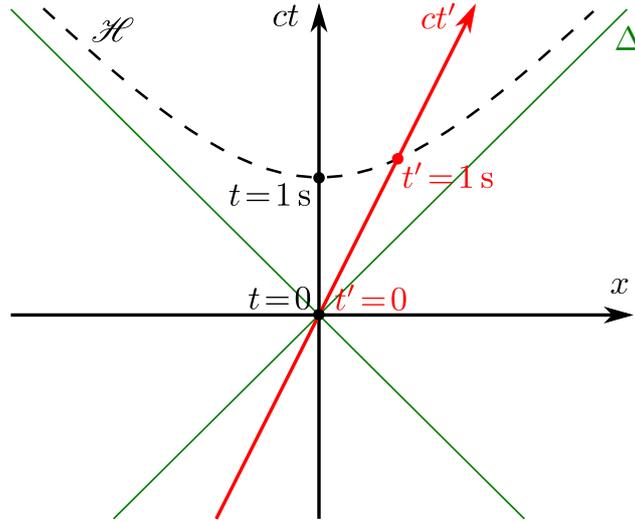


FIGURE 5 – L'événement de temps propre $t' = 1$ s à l'origine de \mathcal{R}' décrit une branche d'hyperbole \mathcal{H} lorsque v varie.

le temps de retour du signal réfléchi en M sitôt reçu (cf. Fig. 4), on obtient

$$t = \frac{1}{2}(t_2 + t_1), \quad (4)$$

$$x = \pm \frac{c}{2}(t_2 - t_1). \quad (5)$$

La formule (4) constitue une définition opérationnelle de la date d'événements distants ; elle définit la *simultanéité au sens d'Einstein-Poincaré*. L'axe des x d'un référentiel peut ensuite être défini comme l'ensemble des événements simultanés à $t = 0$. La formule (5) montre qu'en relativité les mesures de distance peuvent toujours se ramener à des mesures de temps. L'instrument privilégié du relativiste est donc l'horloge et non la règle !

2.3 Changement de référentiel

Considérons un référentiel inertiel \mathcal{R}' en translation uniforme à la vitesse $v = dx/dt$ le long de l'axe des x du référentiel inertiel \mathcal{R} et tel qu'à l'instant $t = 0$ les origines des deux référentiels coïncident. Déterminons les coordonnées (x, ct) de l'origine O' de \mathcal{R}' après qu'il se soit écoulé une durée $t' = T_0$ fixée (par exemple $T_0 = 1$ s) du temps propre de \mathcal{R}' . L'équation du mouvement de O' est par définition $x = vt$, d'où l'on tire $v = x/t$. En reportant cette expression dans (3) avec $t' = T_0$, il vient $t^2 = T_0^2/[1 - x^2/(ct)^2]$,

$$(ct)^2 - x^2 = c^2 T_0^2. \quad (6)$$

Cette relation montre qu'au bout d'un temps propre $t' = T_0$, l'origine de \mathcal{R}' se trouve sur une branche d'hyperbole équilatère \mathcal{H} de sommet le point $(x, ct) = (0, cT_0)$ et d'asymptotes la première bissectrice Δ ($x = ct$) et la deuxième bissectrice ($x = -ct$) (cf. Fig. 5). La position sur \mathcal{H} dépend de la vitesse v .

Déterminons à présent la position de l'axe x' du référentiel \mathcal{R}' dans le diagramme d'espace-temps. Par définition, cet axe est l'ensemble des événements qui, du point de vue de \mathcal{R}' , sont simultanés à l'événement O de temps propre $t' = 0$. Un point générique de l'axe x' , tel que M sur

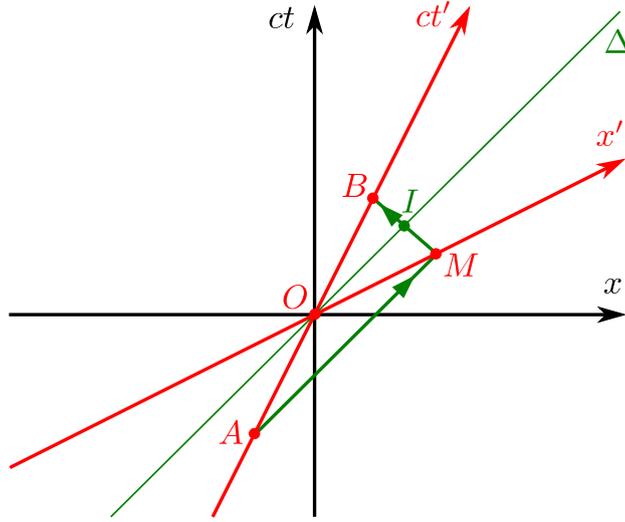


FIGURE 6 – L'axe x' du référentiel \mathcal{R}' est l'ensemble des événements simultanés à $t' = 0$.

la Fig. 6, peut donc être construit suivant le critère de simultanéité d'Einstein-Poincaré discuté au § 2.2 : un signal lumineux partant de l'origine de \mathcal{R}' en A et réfléchi en M doit revenir à l'origine en B tel que

$$t'_O = 0 = \frac{1}{2}(t'_A + t'_B).$$

Cette formule n'est rien d'autre que (4) adaptée au cas du référentiel \mathcal{R}' , exprimant que M soit simultané à O pour \mathcal{R}' (cf. Fig. 6). Ainsi O est le milieu du segment $[AB]$. La droite AM , représentant la ligne d'univers d'un photon, est parallèle à la première bissectrice Δ . D'après le théorème de Thalès, Δ coupe le segment $[BM]$ en son milieu I . De plus, comme le triangle AMB est rectangle en M (car AM et MB sont deux lignes d'univers de photons), les segments $[OB]$ et $[OM]$ ont la même longueur. Il s'en suit que la droite OM est la symétrique de la droite OB par rapport à Δ . Autrement dit, nous avons établi le résultat important suivant :

Dans le diagramme d'espace-temps, l'axe x' du référentiel \mathcal{R}' est le symétrique de l'axe t' par rapport à la première bissectrice Δ . En particulier la pente de l'axe x' est v/c .

Remarquons que cette propriété est vraie pour tous les référentiels inertiels, en particulier pour le référentiel \mathcal{R} : l'axe x est bien le symétrique de l'axe t par rapport à Δ .

On constate sur la Fig. 6 que la notion de simultanéité est relative au référentiel utilisé : deux événements simultanés dans \mathcal{R}' (comme par exemple O et M), ne le sont pas dans le référentiel \mathcal{R} .

L'échelle de l'axe x' se déduit de celle de l'axe t' via le second postulat d'Einstein : la vitesse de la lumière dans \mathcal{R}' devant être c , le photon qui se trouvait en $(x', ct') = (0, 0)$ doit se trouver en $(x', ct') = (a, a)$ avec $a > 0$ à un instant ultérieur (par exemple sur la Fig. 7, $a = 1$ m). Il s'en suit que lorsque la vitesse v varie, l'ensemble des points de coordonnées $(x', ct') = (X_0, 0)$, où X_0 est une constante, décrit une branche d'hyperbole $\tilde{\mathcal{H}}$ qui se déduit de \mathcal{H} par symétrie relative à Δ (cf. Fig. 7).

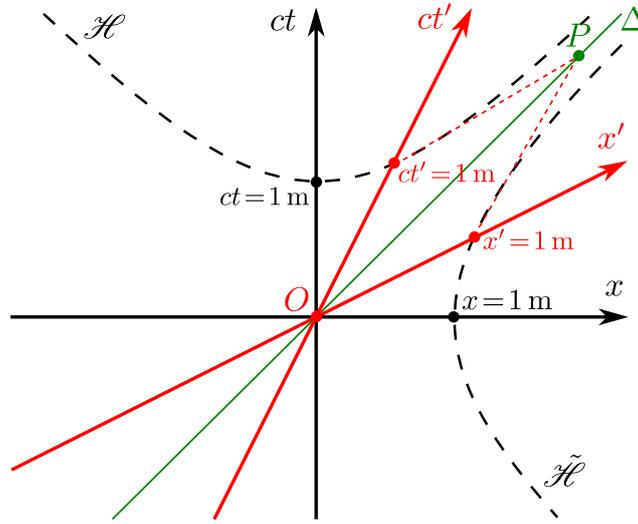


FIGURE 7 – La constance de la vitesse de la lumière permet de déduire l'échelle de l'axe x' de celle de l'axe t' .

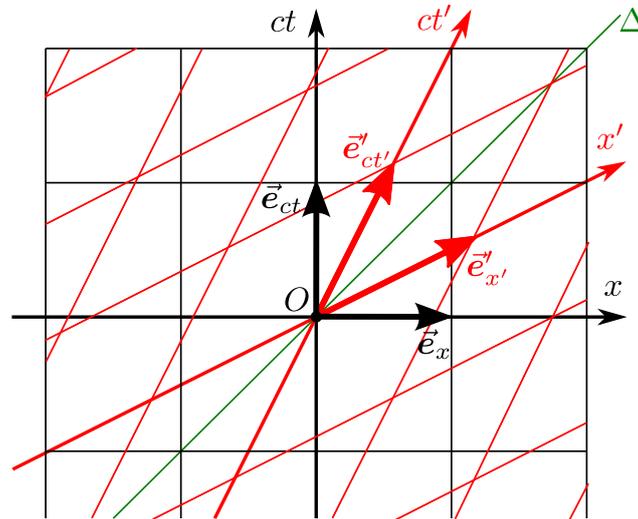


FIGURE 8 – Grilles de coordonnées (x, ct) et (x', ct') sur l'espace-temps relativiste.

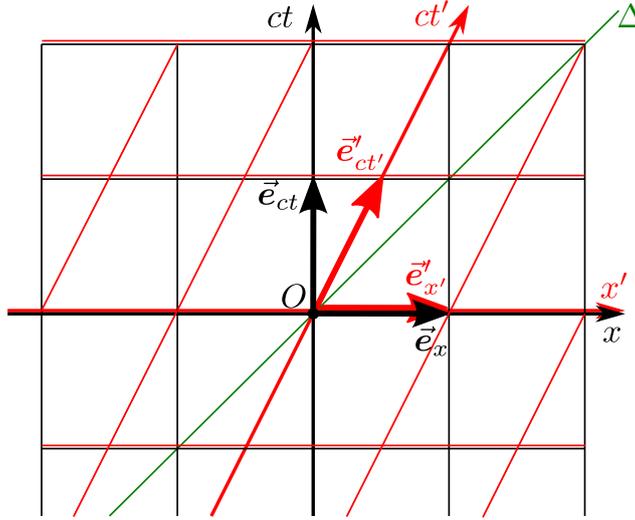


FIGURE 9 – Grilles de coordonnées (x, ct) et (x', ct') sur l'espace-temps newtonien.

2.4 Transformation de Lorentz

Ayant établi la direction et l'échelle des axes x' et t' , on peut représenter la grille des coordonnées de \mathcal{R}' dans le diagramme d'espace-temps. On obtient ainsi la Fig. 8, où l'on a fait figurer les vecteurs de base $(\vec{e}_x, \vec{e}_{ct})$ et $(\vec{e}'_{x'}, \vec{e}'_{ct'})$ associés respectivement aux coordonnées (x, ct) et (x', ct') .

Il est instructif de comparer la Fig. 8 à la Fig. 9 qui représente les grilles de coordonnées des deux référentiels dans l'espace-temps non-relativiste. La différence majeure concerne l'axe des abscisses : puisqu'en régime newtonien, $t = t'$ (*temps absolu* de Newton), l'axe x' est confondu avec l'axe x . En considérant la ligne d'univers d'un photon constitué par la droite Δ , il est clair que la Fig. 9 que la vitesse de la lumière n'est pas invariante en régime newtonien : $c' = \Delta x' / \Delta t' = c/2$, alors qu'elle l'est clairement sur la Fig. 8 : $c' = \Delta x' / \Delta t' = c$.

Nous sommes à présent en mesure d'établir la relation entre les coordonnées (x, t) dans \mathcal{R} et les coordonnées (x', t') dans \mathcal{R}' . À cette fin, considérons un point générique M de coordonnées (x, t) dans \mathcal{R} . La coordonnée t' de M dans \mathcal{R}' est donnée par la procédure d'Einstein-Poincaré (4)-(5) :

$$t' = \frac{1}{2}(t_2' + t_1') \quad (7)$$

$$x' = \pm \frac{c}{2}(t_2' - t_1'), \quad (8)$$

où t_1' est la date, dans \mathcal{R}' , de l'émission d'un signal lumineux depuis l'origine de \mathcal{R}' vers M (événement A_1 , cf. Fig. 10) et t_2' la date de sa réception après réflexion en M (événement A_2). Notons (x_1, t_1) les coordonnées de A_1 dans \mathcal{R} et (x_2, t_2) celles de A_2 . Puisque A_1 et A_2 sont sur la ligne d'univers de l'origine de \mathcal{R}' , qui est en translation à la vitesse v par rapport à \mathcal{R} , on a nécessairement

$$x_1 = vt_1 \quad \text{et} \quad x_2 = vt_2. \quad (9)$$

Les composantes des vecteurs $\overrightarrow{A_1 M}$ et $\overrightarrow{A_2 M}$ dans le repère $(\vec{e}_x, \vec{e}_{ct})$ sont alors

$$\overrightarrow{A_1 M}(x - vt_1, c(t - t_1)) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{A_2 M}(x - vt_2, c(t - t_2)).$$

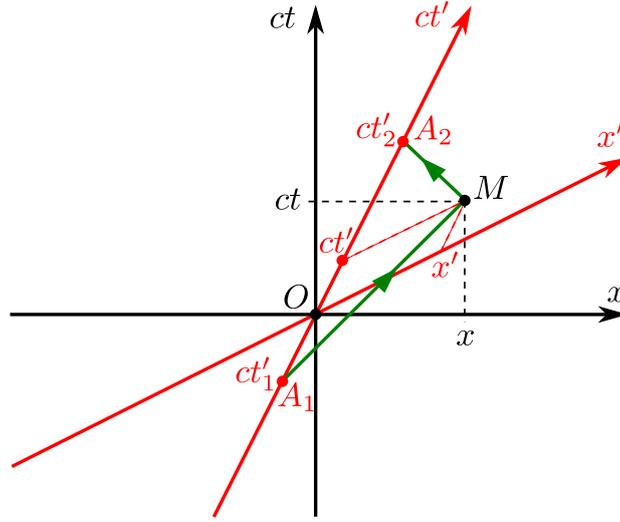


FIGURE 10 – Transformation de Lorentz $(x, ct) \mapsto (x', ct')$.

Puisque $\overrightarrow{A_1 M}$ correspond à la ligne d'univers d'un photon, il doit être à $+45^\circ$ dans le diagramme d'espace-temps, ce qui implique $x - vt_1 = c(t - t_1)$, d'où

$$t_1 = \frac{ct - x}{c - v}. \quad (10)$$

De même, le vecteur $\overrightarrow{A_2 M}$ doit être à -45° : $x - vt_2 = -c(t - t_2)$, d'où

$$t_2 = \frac{ct + x}{c + v}. \quad (11)$$

Pour des événements comme A_1 et A_2 , situés à l'origine de \mathcal{R}' , les dates t et t' sont reliées par la formule (3) : $t = \gamma t'$. On a donc $t'_1 = \gamma^{-1}t_1$ et $t'_2 = \gamma^{-1}t_2$, soit, d'après (10) et (11),

$$t'_1 = \frac{ct - x}{\gamma(c - v)} \quad \text{et} \quad t'_2 = \frac{ct + x}{\gamma(c + v)}. \quad (12)$$

La formule (7) conduit alors à

$$t' = \frac{1}{2}(t'_1 + t'_2) = \frac{1}{2\gamma} \left(\frac{ct - x}{c - v} + \frac{ct + x}{c + v} \right) = \frac{c^2 t - vx}{\gamma(c^2 - v^2)}.$$

Compte tenu de l'expression (3) du facteur de Lorentz γ , cette formule se simplifie en

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right). \quad (13)$$

La valeur de x' s'obtient à partir de (8) (où l'on choisit le signe + afin d'avoir $x' > 0$ comme sur la Fig. 10) et (12) :

$$x' = \frac{c}{2}(t'_2 - t'_1) = \frac{c}{2\gamma} \left(\frac{ct + x}{c + v} - \frac{ct - x}{c - v} \right) = \frac{c^2}{\gamma(c^2 - v^2)}(x - vt) = \gamma(x - vt).$$

Le résultat final est donc

$$\boxed{\begin{cases} x' &= \gamma(x - vt) \\ t' &= \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right). \end{cases}} \quad (14)$$

On complète ces formules par $y' = y$ et $z' = z$ pour obtenir la *transformation de Lorentz spéciale* qui relie les coordonnées dans \mathcal{R} à celles dans \mathcal{R}' . On note qu'à la limite $|v| \ll c$, la transformation de Lorentz se réduit à la *transformation de Galilée* : $x' = x - vt$, $y' = y$, $z' = z$ et $t' = t$.

2.5 Loi de composition des vitesses

Considérons une particule \mathcal{P} se déplaçant suivant l'axe des x dans \mathcal{R} à la vitesse V :

$$V = \frac{dx}{dt}. \quad (15)$$

Par rapport au référentiel \mathcal{R}' , sa vitesse le long de l'axe des x' est

$$V' = \frac{dx'}{dt'}. \quad (16)$$

En différenciant (14) et en utilisant le fait que v et γ sont constants, on obtient

$$\begin{cases} dx' &= \gamma(dx - v dt) \\ dt' &= \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2} dx\right), \end{cases}$$

si bien que (16) devient

$$V' = \frac{dx - v dt}{dt - \frac{v}{c^2} dx}.$$

En divisant numérateur et dénominateur par dt et en comparant avec (15), on obtient la loi relativiste de composition des vitesses :

$$\boxed{V' = \frac{V - v}{1 - vV/c^2}}. \quad (17)$$

À la limite non relativiste, $|vV| \ll c^2$, cette formule se réduit à la loi galiléenne : $V' = V - v$.

On tire deux conséquences de (17) :

$$(|V| \leq c \text{ et } |v| \leq c) \implies |V'| \leq c \quad (18)$$

et

$$|V| = c \implies |V'| = c. \quad (19)$$

Notons que ce dernier résultat est cohérent avec le second postulat d'Einstein (cf. § 2.1) : si la particule se déplace à la vitesse de lumière dans \mathcal{R} , elle fait de même dans \mathcal{R}' .

Illustration expérimentale : Expérience de Fizeau (1850).

2.6 Effet Doppler

Supposons qu'un signal électromagnétique périodique soit émis depuis l'origine du référentiel \mathcal{R}' et notons T' sa période mesurée dans \mathcal{R}' . Dans le diagramme d'espace-temps, chaque « top » du signal correspond à un demi-cône de lumière ayant pour sommet l'événement produisant le top (cf. Fig. 11). Le signal est reçu à l'origine du référentiel \mathcal{R} où l'on mesure une période T . Sans perte de généralité, on peut supposer que l'émetteur et le récepteur se croisent en O de coordonnées $t = t' = 0$ et $x = 0$. Il est clair sur la Fig. 11 que pour $t < 0$, c'est-à-dire lorsque l'émetteur s'approche du détecteur, la période T est plus petite que lorsque $t > 0$, c'est-à-dire lorsque l'émetteur s'éloigne du récepteur. Si l'on superposait à la Fig. 11 l'hyperbole d'« équitemporalité » de la Fig. 5, il serait également clair que pour $t > 0$, $T > T'$.

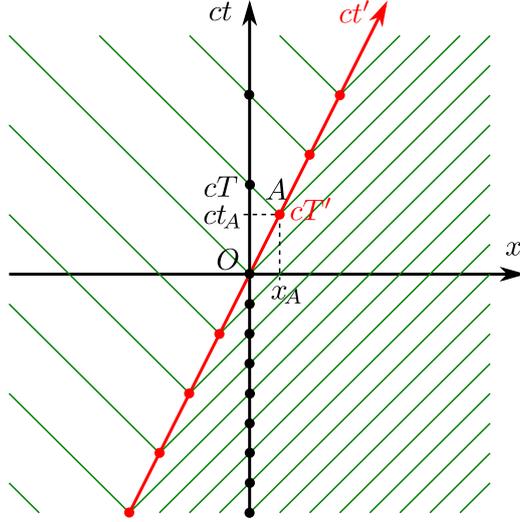


FIGURE 11 – Effet Doppler : un signal électromagnétique est émis de manière isotrope à intervalles réguliers depuis l'origine du référentiel \mathcal{R}' (points rouges sur l'axe ct').

Remarque : À la limite non relativiste, la Fig. 11 reste valable comme diagramme d'espace-temps newtonien. L'effet Doppler apparaît alors clairement, les courbes d'« équitémporalité » étant les droites horizontales marquant le temps absolu newtonien (cf. Fig. 9) et non des hyperboles. En comparant l'espacement vertical des points noirs et rouges de la figure, on lit directement que dans la phase d'approche, $T < T'$ et dans celle d'éloignement, $T > T'$.

Le calcul de T en fonction de T' et de la vitesse v de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} est élémentaire à partir de la Fig. 11. Soit en effet A l'événement correspondant au premier top émis après le passage par O ; notons (x_A, t_A) ses coordonnées dans \mathcal{R} . En considérant le triangle rectangle isocèle dont un sommet est A et les deux autres marqués ct_A et cT sur la Fig. 11, il vient

$$cT - ct_A = x_A. \quad (20)$$

Or, $x_A = vt_A$, d'où

$$T = t_A \left(1 + \frac{v}{c}\right).$$

Par ailleurs, la date t_A de l'événement A dans \mathcal{R} est reliée à sa date t'_A dans \mathcal{R}' par la formule (3) : $t_A = \gamma t'_A$. Or, t'_A , qui est la durée séparant A de O dans \mathcal{R}' , n'est autre que la période T' . Il vient donc $t_A = \gamma T'$ et

$$T = \gamma \left(1 + \frac{v}{c}\right) T'.$$

Compte tenu de l'expression (3) de γ en fonction de v , cette expression se simplifie en

$$T = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} T'. \quad (21)$$

Si l'événement A est situé en amont de O , i.e. si $t_A < 0$, il convient d'écrire $cT + ct_A = x_A$, plutôt que (20). On obtient alors

$$T = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} T', \quad (t < 0). \quad (22)$$

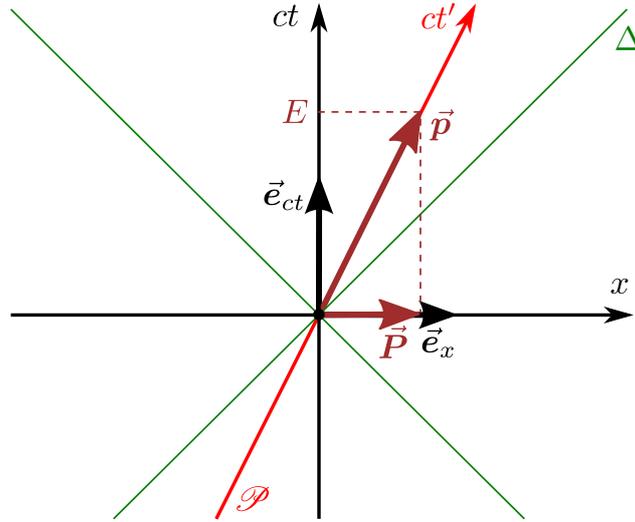


FIGURE 12 – Quadrivecteur énergie-impulsion d’une particule.

On peut regrouper les formules (21) et (22) en une seule et exprimer le résultat en fonction des fréquences $f = 1/T$ et $f' = 1/T'$, plutôt que des périodes :

$$f = \sqrt{\frac{1 \pm v/c}{1 \mp v/c}} f', \quad (23)$$

où le symbole \pm vaut $+$ lorsque l’émetteur s’approche du récepteur et $-$ lorsqu’il s’en éloigne et le symbole \mp vaut l’inverse. Le fait que $f \neq f'$, sauf si $v = 0$, constitue l’*effet Doppler*. Plus précisément

- si l’émetteur s’approche : $f > f'$ car $f = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} f'$;
- si l’émetteur s’éloigne : $f < f'$ car $f = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} f'$.

À la limite non relativiste, $|v| \ll c$, le développement limité au premier ordre de la formule (23) redonne la formule classique⁴ :

$$f \simeq \left(1 \pm \frac{v}{c}\right) f' \quad (|v| \ll c). \quad (24)$$

Illustration expérimentale : Expérience d’Ives et Stilwell (1938).

3 Dynamique

3.1 Quadrivecteur énergie-impulsion

La dynamique d’une particule \mathcal{P} sans structure interne est entièrement spécifiée par la donnée d’un vecteur \vec{p} tangent en tout point à sa ligne d’univers et appelé *quadrivecteur énergie-impulsion* (cf. Fig. 12). Si \mathcal{P} est une particule de masse non-nulle, en mouvement rectiligne uniforme à la

4. L’effet Doppler non relativiste figure explicitement dans le programme de Terminale S [2].

vitesse $v < c$ par rapport à un référentiel inertiel \mathcal{R} , il existe alors un référentiel inertiel \mathcal{R}' où \mathcal{P} est immobile : \mathcal{R}' est précisément le référentiel en translation à la vitesse $v\vec{e}_x$ par rapport à \mathcal{R} (\vec{e}_x marquant la direction du mouvement de \mathcal{P} dans \mathcal{R}). Les composantes de \vec{p} dans \mathcal{R}' sont de la forme

$$(p_{x'}, p_{y'}, p_{z'}, p_{ct'}) = (0, 0, 0, mc), \quad (25)$$

où m est une constante appelée *masse au repos* (ou *masse tout court*) de \mathcal{P} .

Remarque : L'appellation *quadrivecteur* vient rappeler que \vec{p} est un élément de l'espace vectoriel associé à l'espace affine \mathcal{E} , qui est de dimension quatre. Mais, d'un point de vue purement mathématique, \vec{p} n'est rien d'autre qu'un vecteur.

Dans \mathcal{R} , on peut décomposer \vec{p} sur le repère $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, \vec{e}_{ct})$ (cf. § 2.4 et Fig. 12) :

$$\vec{p} = P_x \vec{e}_x + P_y \vec{e}_y + P_z \vec{e}_z + \frac{E}{c} \vec{e}_{ct}. \quad (26)$$

Le coefficient E qui apparaît dans cette décomposition est appelé *énergie* de la particule \mathcal{P} par rapport à \mathcal{R} et le vecteur

$$\vec{P} = P_x \vec{e}_x + P_y \vec{e}_y + P_z \vec{e}_z \quad (27)$$

est appelé *quantité de mouvement* de \mathcal{P} par rapport à \mathcal{R} . On peut réécrire la formule (26) en termes des composantes par rapport au repère $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, \vec{e}_{ct})$:

$$(p_x, p_y, p_z, p_{ct}) = (P_x, P_y, P_z, E/c). \quad (28)$$

Remarque : Le quadrivecteur énergie-impulsion \vec{p} est intrinsèque à la particule \mathcal{P} et ne dépend d'aucun référentiel. Par contre, l'énergie E et la quantité de mouvement \vec{P} sont définis par rapport à un référentiel donné.

Considérons une particule qui, comme sur la Fig. 12, se déplace à la vitesse v le long de l'axe des x de \mathcal{R} . À partir de (25), (28) et de la transformation de Lorentz (14) entre les composantes dans \mathcal{R} et \mathcal{R}' , on obtient

$$\boxed{E = \gamma mc^2} \quad (29)$$

et

$$P_x = \gamma mv, \quad P_y = 0, \quad P_z = 0. \quad (30)$$

Ce dernier résultat s'écrit sous la forme vectorielle suivante :

$$\boxed{\vec{P} = \gamma m \vec{v}}. \quad (31)$$

Dans le cas où la particule est immobile dans \mathcal{R} ($\gamma = 1$), la formule (29) se réduit à $E = mc^2$ et E est alors appelée *énergie de masse*.

Illustration expérimentale :

- Expérience de Bertozzi (1964).
- Énergie des protons accélérés dans le LHC.

3.2 Principe fondamental de la dynamique relativiste

Soit $(\mathcal{P}_a)_{1 \leq a \leq N}$ un système de N particules et \mathcal{R} un référentiel inertiel. À un instant t dans \mathcal{R} , le quadrivecteur énergie-impulsion total du système est défini par

$$\vec{p}_{\text{tot}} = \sum_{a=1}^N \vec{p}_a(t), \quad (32)$$

où $\vec{p}_a(t)$ est le quadrivecteur énergie-impulsion de la particule \mathcal{P}_a au point de sa ligne d'univers de date t dans \mathcal{R} .

Le principe fondamental de la dynamique relativiste s'énonce alors comme suit

Le quadrivecteur énergie-impulsion total d'un système isolé, \vec{p}_{tot} , est constant : il ne dépend ni du choix de la date t dans \mathcal{R} , ni du choix du référentiel \mathcal{R} .

Ce principe s'applique même s'il y a des réactions entre les particules et que leur nombre n'est pas conservé. Par contre, il n'est vrai que si le système est isolé.

On peut décomposer le quadrivecteur énergie-impulsion total par rapport au référentiel \mathcal{R} , suivant (26)-(27). On définit ainsi l'énergie totale E_{tot} et la quantité de mouvement totale \vec{P}_{tot} du système par rapport à \mathcal{R} :

$$\vec{p}_{\text{tot}} = \vec{P}_{\text{tot}} + \frac{E_{\text{tot}}}{c} \vec{e}_{ct}. \quad (33)$$

Il est facile de voir que

$$E_{\text{tot}} = \sum_{a=1}^N E_a \quad \text{et} \quad \vec{P}_{\text{tot}} = \sum_{a=1}^N \vec{P}_a, \quad (34)$$

E_a (resp. \vec{P}_a) est l'énergie (resp. la quantité de mouvement) de la particule \mathcal{P}_a dans le référentiel \mathcal{R} . Comme conséquence du principe fondamental de la dynamique relativiste énoncé ci-dessus, on a alors, pour un système isolé :

$$\boxed{\frac{dE_{\text{tot}}}{dt} = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{d\vec{P}_{\text{tot}}}{dt} = 0}. \quad (35)$$

Autrement dit, l'énergie totale et la quantité de mouvement totale par rapport à un référentiel inertiel sont des quantités conservées lors de l'évolution d'un système isolé.

Illustration expérimentale :

- Collision de particules.
- Notion d'énergie seuil.

4 Approfondissement (spé MP, MP*) : l'espace-temps de Minkowski

Remarque : Cette partie fait appel à des mathématiques de niveau math. spé. MP ou MP*. Elle pourrait d'ailleurs être traitée en commun avec le cours de mathématiques, étant donnée qu'elle fournit une belle illustration du cours sur les formes bilinéaires symétriques et les formes quadratiques.

4.1 La forme bilinéaire « tenseur métrique »

Nous avons vu au § 2.2 qu'en relativité restreinte, l'espace-temps est décrit par un espace affine \mathcal{E} de dimension quatre sur \mathbb{R} . Notons E l'espace vectoriel associé. E est isomorphe à \mathbb{R}^4 . Introduisons la forme bilinéaire g définie sur E par

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, \quad \boxed{g(\vec{u}, \vec{v}) = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z - u_{ct} v_{ct}}, \quad (36)$$

où (u_x, u_y, u_z, u_{ct}) et (v_x, v_y, v_z, v_{ct}) sont les composantes des vecteurs \vec{u} et \vec{v} par rapport à un référentiel inertiel \mathcal{R} . L'écriture (36) est équivalente à dire que la matrice de la forme bilinéaire

g dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, \vec{e}_{ct})$ associée à \mathcal{R} est

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (37)$$

On remarque que g est symétrique :

$$\forall(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, \quad g(\vec{u}, \vec{v}) = g(\vec{v}, \vec{u}) \quad (38)$$

et que sa signature est $(+, +, +, -)$. La forme bilinéaire g est appelée *tenseur métrique*, ou *métrique* tout court, de l'espace-temps.

Si \mathcal{R}' est un référentiel inertiel en translation à la vitesse $\vec{v} = v \vec{e}_x$ par rapport à \mathcal{R} , le passage de la base de \mathcal{R} à celle de \mathcal{R}' s'effectue par la transformation de Lorentz spéciale (14), qui s'écrit sous forme matricielle comme

$$\begin{pmatrix} \vec{e}'_{x'} \\ \vec{e}'_{y'} \\ \vec{e}'_{z'} \\ \vec{e}'_{ct'} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & 0 & \gamma v/c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \gamma v/c & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}}_P \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \\ \vec{e}_{ct} \end{pmatrix}. \quad (39)$$

La matrice de la métrique g dans \mathcal{R}' s'obtient par la formule classique de changement de base :

$$G' = {}^t P G P, \quad (40)$$

où P est la matrice de passage définie par (39) et ${}^t P$ sa transposée. Dans le cas présent, ${}^t P = P$ puisque P est une matrice symétrique. Le calcul explicite des produits matriciels dans (40) et la relation $\gamma^{-2} = 1 - v^2/c^2$ conduisent à

$$G' = G. \quad (41)$$

Ainsi la métrique g a la même expression dans \mathcal{R}' que dans \mathcal{R} :

$$\forall(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, \quad g(\vec{u}, \vec{v}) = u_{x'}v_{x'} + u_{y'}v_{y'} + u_{z'}v_{z'} - u_{ct'}v_{ct'}. \quad (42)$$

La métrique g généralise la notion de *produit scalaire euclidien* de l'espace tridimensionnel. Ce dernier est une forme bilinéaire symétrique de signature $(+, +, +)$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z. \quad (43)$$

Le couple (\mathcal{E}, g) est appelé *espace-temps de Minkowski*. Il s'agit d'une structure qui généralise l'espace euclidien habituel dans deux directions : (i) le nombre de dimensions est quatre et non plus trois et (ii) le produit scalaire n'est plus défini positif.

4.2 Bases orthonormales

Les bases telles que $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, \vec{e}_{ct})$ ou $(\vec{e}'_{x'}, \vec{e}'_{y'}, \vec{e}'_{z'}, \vec{e}'_{ct'})$, où la matrice de g est de la forme (37), sont appelées des *bases orthonormales vis-à-vis de g* ; elles vérifient

$$g(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0 \quad \text{si } i \neq j \quad (44)$$

$$g(\vec{e}_i, \vec{e}_i) = 1 \quad \text{pour } i = x, y \text{ ou } z \quad (45)$$

$$g(\vec{e}_{ct}, \vec{e}_{ct}) = -1. \quad (46)$$

Le résultat (41) montre que les repères des référentiels inertiels sont toujours des bases orthonormales pour g . Inversement, la donnée d'une base orthonormale et d'un événement $O \in \mathcal{E}$ (origine) détermine complètement un référentiel inertiel.

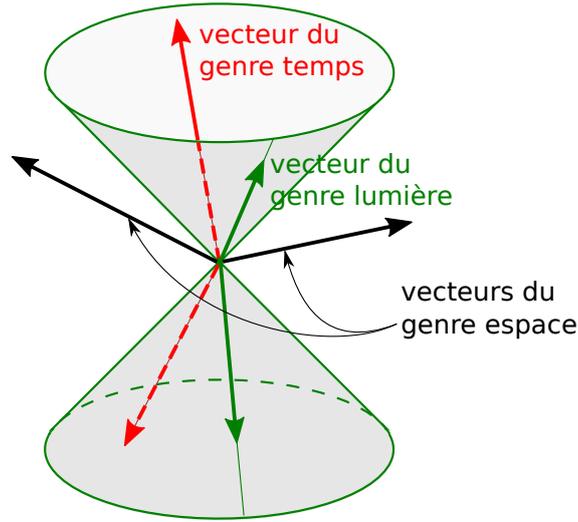


FIGURE 13 – Cône isotrope de la métrique g et classification des vecteurs.

4.3 Genre des vecteurs

Pour le produit scalaire euclidien, on a toujours $\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0$ et $\vec{v} \cdot \vec{v} = 0$ ssi \vec{v} est le vecteur nul. Ici, les vecteurs se rangent en trois catégories :

- si $g(\vec{v}, \vec{v}) > 0$, on dit que \vec{v} est *du genre espace* ;
- si $g(\vec{v}, \vec{v}) = 0$ et $\vec{v} \neq 0$, on dit que \vec{v} est *du genre lumière* ;
- si $g(\vec{v}, \vec{v}) < 0$, on dit que \vec{v} est *du genre temps*.

Ainsi, les vecteurs \vec{e}_x , \vec{e}_y et \vec{e}_z de la base de \mathcal{R} sont du genre espace, alors que \vec{e}_{ct} est du genre temps [cf. (45)-(46)]. Les vecteurs du genre lumière sont appelés *vecteurs isotropes* de la forme bilinéaire g . Leur ensemble forme le *cône isotrope* de g , encore appelé *cône de lumière*. Les vecteurs du genre temps sont toujours situés à l'intérieur du cône isotrope et les vecteurs du genre espace à l'extérieur (cf. Fig. 13).

4.4 Groupe de Lorentz

On appelle *transformation de Lorentz* tout endomorphisme de E qui préserve la métrique g , c'est-à-dire toute application linéaire $L : E \rightarrow E$ telle que

$$\forall(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, \quad g(L(\vec{u}), L(\vec{v})) = g(\vec{u}, \vec{v}). \quad (47)$$

Les transformations de Lorentz *spéciales* rencontrées au § 2.4 constituent bien entendu un cas particulier des transformations de Lorentz. L'ensemble des transformations de Lorentz, muni de la loi de composition \circ , forme un groupe, appelé *groupe de Lorentz*. Il s'agit d'un sous-groupe du groupe linéaire de E , $\text{GL}(E)$ (ensemble des automorphismes de E). Démontrons en effet que chacun des axiomes de la définition d'un groupe est satisfait :

- la loi \circ est une loi interne pour l'ensemble des transformations de Lorentz : si L_1 et L_2 sont deux transformations de Lorentz, alors pour tout couple (\vec{u}, \vec{v}) de vecteurs de E ,

$$\begin{aligned} g((L_1 \circ L_2)(\vec{u}), (L_1 \circ L_2)(\vec{v})) &= g(L_1(L_2(\vec{u})), L_1(L_2(\vec{v}))) \\ &= g(L_2(\vec{u}), L_2(\vec{v})) = g(\vec{u}, \vec{v}), \end{aligned}$$

ce qui montre que l'application composée $L_1 \circ L_2$ est bien une transformation de Lorentz ;

- la loi \circ est évidemment associative : $L_1 \circ (L_2 \circ L_3) = (L_1 \circ L_2) \circ L_3$: elle l'est pour toutes les applications $E \rightarrow E$, donc en particulier pour les transformations de Lorentz ;
- il existe un élément neutre : l'application identité $\text{Id} : E \rightarrow E$, $\vec{v} \mapsto \vec{v}$, qui satisfait évidemment (47) ;
- tout élément admet un inverse : soit L une transformation de Lorentz et $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ une base orthonormale de (E, g) . Alors, en vertu de (47), $(L(\vec{e}_1), L(\vec{e}_2), L(\vec{e}_3), L(\vec{e}_4))$ est une base orthonormale de (E, g) . L est donc un endomorphisme inversible. Il s'agit de montrer que son inverse, L^{-1} , est également une transformation de Lorentz : puisque $L \circ L^{-1} = \text{Id}$, on a évidemment $\forall(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$, $g(L \circ L^{-1}(\vec{u}), L \circ L^{-1}(\vec{v})) = g(\vec{u}, \vec{v})$. Par ailleurs, comme L vérifie (47), on a $g(L \circ L^{-1}(\vec{u}), L \circ L^{-1}(\vec{v})) = g(L^{-1}(\vec{u}), L^{-1}(\vec{v}))$. Ainsi $g(L^{-1}(\vec{u}), L^{-1}(\vec{v})) = g(\vec{u}, \vec{v})$, ce qui montre que L^{-1} est bien une transformation de Lorentz.

Le groupe de Lorentz est en fait le groupe orthogonal de E par rapport à la forme bilinéaire g . Rappelons en effet que d'ordinaire on qualifie de *groupe orthogonal* de E , l'ensemble $O(E)$ des automorphismes préservant le produit scalaire euclidien. On donc simplement remplacé ici le produit scalaire euclidien par g , si bien que l'on pourrait noter le groupe de Lorentz comme $O(E, g)$.

L'ensemble \mathcal{S} des transformations de Lorentz spéciales le long d'une même direction \vec{e}_x forme un sous-groupe du groupe de Lorentz. On peut paramétrer chaque élément $L \in \mathcal{S}$ par une vitesse $v \in]-c, c[$, la matrice de L par rapport à la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z, \vec{e}_{ct})$ étant la matrice P donnée par (39). Un meilleur paramètre est toutefois la *rapidité* $\psi \in \mathbb{R}$ définie par

$$\tanh \psi = \frac{v}{c}. \quad (48)$$

En effet, en terme de rapidité, la loi de composition \circ s'exprime comme une simple addition : si ψ_1 est la rapidité de la transformation de Lorentz spéciale L_1 et ψ_2 celle de la transformation de Lorentz spéciale L_2 , $L_1 \circ L_2$ est la transformation de Lorentz spéciale de rapidité

$$\boxed{\psi = \psi_1 + \psi_2}. \quad (49)$$

Cette formule se déduit de l'identité de trigonométrie hyperbolique

$$\tanh(\psi_1 + \psi_2) = \frac{\tanh \psi_1 + \tanh \psi_2}{1 + \tanh \psi_1 \tanh \psi_2} \quad (50)$$

et de la loi de composition des vitesses (17). En effet, dans le contexte du § 2.5, si L_2 est la transformation de Lorentz spéciale qui fait passer de \mathcal{R}' à \mathcal{R} , $\tanh \psi_2 = -v/c$, et si L_1 est la transformation de Lorentz spéciale qui fait passer de \mathcal{R} à \mathcal{P} , $\tanh \psi_1 = V/c$. $L_1 \circ L_2$ est alors la transformation de Lorentz spéciale qui fait passer de \mathcal{R}' à \mathcal{P} , si bien que $\tanh \psi = V'/c$. La comparaison des formules (17) et (50) conduit immédiatement à (49).

4.5 De l'importance du groupe de Lorentz

Dans la physique moderne, les groupes de symétrie jouent un rôle fondamental. C'est en particulier à travers eux qu'on obtient des quantités conservées, via le *théorème de Noether* (cf. par exemple [7]). Pour ce qui est de la relativité restreinte, le groupe de symétrie est le groupe de Lorentz. Une approche théorique d'un phénomène est qualifiée de relativiste si, et seulement si, elle est invariante sous l'action du groupe de Lorentz.

Remerciements

Je remercie vivement Valérie Le Boulch, professeur de physique en CPGE au Lycée Michelet (Vanves), pour les nombreux échanges lors de la rédaction de cet article et sa relecture attentive.

Références

- [1] Colloque UPS : *Au delà de la Physique Classique en CPGE ?*, ENST, Paris, 20 novembre 2010
<http://sites.google.com/site/physiquemoderneups/>
- [2] Bulletin Officiel de l'Éducation Nationale, bulletin spécial **8**, 13 octobre 2011
http://www.education.gouv.fr/pid25535/bulletin_officiel.html?cid_bo=57537
- [3] BORATAV M. & KERNER R., 1991, *Relativité*, Ellipses (Paris).
- [4] CAVAILLÈS J.-A. & BARBET-MASSIN R., 2011, *Au-delà de la physique classique aux niveaux L1 et L2 ?*, Reflets de la Physique **24**, 21.
- [5] EINSTEIN A., 1905, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Annalen der Physik **17**, 891 ;
<http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k2094597.image.f896>
traduction française dans *Albert Einstein, œuvres choisies*, volume 2 : *Relativités I*, sous la direction de F. BALIBAR, Éditions du Seuil / Éditions du CNRS (Paris) (1993), p. 31, ainsi que dans EINSTEIN A., 1925, *Sur l'électrodynamique des corps en mouvement*, Gauthier-Villars (Paris) ; réimprimé aux Éditions Jacques Gabay (Paris) en 2005.
- [6] GIULINI D., 2005, *Special Relativity, a first encounter*, Oxford University Press (Oxford).
- [7] GOURGOULHON E., 2010, *Relativité restreinte, des particules à l'astrophysique*, EDP Sciences (Les Ulis) / CNRS Éditions (Paris).
<http://relativite.obspm.fr/>
- [8] LANGLOIS D., 2011, *Introduction à la relativité*, Vuibert (Paris).
- [9] PÉREZ J.-P., 2005, *Relativité et invariance* (2ème édition), Dunod (Paris).
- [10] SEMAY C. & SILVESTRE-BRAC B., 2005, *Relativité restreinte : bases et applications*, Dunod (Paris).
- [11] SIMON Y., 2004, *Relativité restreinte*, Vuibert (Paris).
- [12] TREPS N., 2010, *L'enseignement de la relativité et de la physique quantique en L2*, conférence lors du colloque [1].